横浜市立大学医学部医学科 2022 年度

【解答】

| | | | |
|---|---|---|---|
| [ I ] | (1) 333 個<br>(2) 1<br>(3) $\frac{3}{2}$<br>(4) $\frac{32}{53}$ | [ III ] | (1) $\alpha = \frac{1}{4}$<br>(2) $a_{n+1} = -a_n$<br>(3) $\begin{cases} n\text{が奇数のとき}\ \frac{1}{4} \\ n\text{が偶数のとき}\ 0 \end{cases}$ |
| [ II ] | (1) $f(\theta) = -2t^2 - 2t + 1$<br>(2) 最大値 $\frac{3}{2}$， $\theta = 210°, 330°$<br>(3) $C = 0, 1, 2$ | [ IV ] | (1) $\int t\sin t\, dt = -t\cos t + \sin t + C$<br>$C$ は積分定数<br>(2) $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$<br>(3) 0<br>(4) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{t\sin t}{1+\pi^{\sin^3 t}} dt = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ |

【解説】

[ I ] 小問集合

(1) 数学 A 整数の割り算

$n = 3k, 3k+1, 3k+2$ （$k$は自然数）とおく。

3 の倍数の判別の問題が出題されたら、まず $3k, 3k+1, 3k+2$ の場合分けを考える。

[1] $n = 3k$ のとき、

$n^5 + 1 = (3k)^5 + 1 = 3 \cdot 81k^5 + 1$

となるので、3 の倍数ではない。

[2] $n = 3k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} n^5 + 1 &= (3k+1)^5 + 1 \\ &= (3k)^5 + 5(3k)^4 + 10(3k)^3 + 10(3k)^2 + 5 \cdot 3k + 2 \\ &= 3(81k^5 + 135k^4 + 90k^2 + 30k^2 + 5k) + 2 \end{aligned}$$

となるので、3 の倍数ではない。

[3] $n = 3k+2$ のとき、

$$\begin{aligned} n^5 + 1 &= (3k+2)^5 + 1 \\ &= (3k)^5 + 5(3k)^4 \cdot 2 + 10(3k)^3 \cdot 2^2 + 10(3k)^2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 3k \cdot 2^4 + 33 \\ &= 3(81k^5 + 270k^4 + 360k^3 + 240k^2 + 80k + 11) \end{aligned}$$

となるので、3 の倍数である。

[1][2][3]より、$n = 3k+2$ のときに 3 の倍数になるので、$n = 2, 5, \ . \ . \ . , 998$ の 333 個である。

(2) 数学 III 複素数平面

$\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$

← 複素平面上で $\alpha$ は原点を中心として 120°回転した点を表す。
$\alpha^2$ は 240°回転した点、$\alpha^3$ は 360°回転した点(元の位置)を表す。

$\therefore \alpha^3 = 1$

$\alpha^{18} + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 = (\alpha^3)^6 + (\alpha^3)^2 + \alpha \cdot \alpha^3 + \alpha^2$

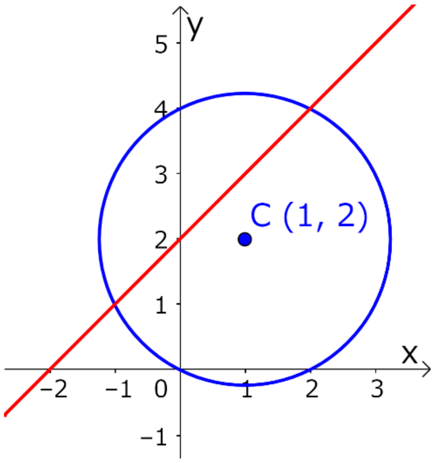
$$= 1 + 1 + \alpha + \alpha^2$$

$$= 1 + 1 + \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) + \left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

$$= 1 + 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 1$$

(3) 数学 II　円と方程式




$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

$\therefore CA = CB = \sqrt{5}$

点 C $(1, 2)$ と直線 $x - y + 2 = 0$ の距離 $d$ は

$$d = \frac{|1 - 2 + 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

←点と直線の距離

点$(x_1, y_1)$と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 $d$ は下記の式で表される。

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

線分 AB の中点を点 M とすると、

△ACM において三平方の定理より

$$AM = BM = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore AB = 2AM = 3\sqrt{2}$

したがって、$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$

［別解］ 数学 B　平面ベクトル

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$　　　$\therefore$ 点$C(1, 2)$

$y = x + 2$ を代入して、

$(x-1)^2 + (x+2-2)^2 = 5$

$2x^2 - 2x - 4 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

$x = -1, 2$

2 点 A, B の座標は$(-1, 1), (2, 4)$。

$\therefore \overrightarrow{CA} = (-2, -1), \overrightarrow{CB} = (1, 2)$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|-2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1| = \frac{3}{2}$$

←三角形の面積

$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$
とすると

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

(4) 数学 A　確率

6 人のカードの和が $n$ になる確率を$P_n$とし、そのときに引き分けとなる確率(あたりのカードが上から$n+1$ 枚目以降にある確率)を$Q_n$とする。

$$P_6 + P_7 + P_8 + \cdots + P_{36} = 1$$

$$P_6 = P_{36}\,, P_7 = P_{35}\,, P_8 = P_{34}\,, \cdots$$

$$Q_n = \frac{53-n}{53}$$

すると、このゲームが引き分けで終了する確率は

$$P_6Q_6 + P_7Q_7 + P_8Q_8 + \cdots + P_{34}Q_{34} + P_{35}Q_{35} + P_{36}Q_{36}$$

$$= P_6Q_6 + P_7Q_7 + P_8Q_8 + \cdots + P_8Q_{34} + P_7Q_{35} + P_6Q_{36}$$

$$= P_6(Q_6 + Q_{36}) + P_7(Q_7 + Q_{35}) + P_8(Q_8 + Q_{34}) + \cdots + P_{20}(Q_{20} + Q_{22}) + P_{21}Q_{21}$$

$$= P_6\left(\frac{47}{53} + \frac{17}{53}\right) + P_7\left(\frac{46}{53} + \frac{18}{53}\right) + P_8\left(\frac{45}{53} + \frac{19}{53}\right) + \cdots + P_{20}\left(\frac{33}{53} + \frac{31}{53}\right) + P_{21} \times \frac{32}{53}$$

$$= (P_6 + P_7 + P_8 + \cdots + P_{20}) \times \frac{64}{53} + P_{21} \times \frac{32}{53}$$

$$= \left(\frac{P_6 + P_{36}}{2} + \frac{P_7 + P_{35}}{2} + \frac{P_8 + P_{34}}{2} + \cdots + \frac{P_{20} + P_{22}}{2}\right) \times \frac{64}{53} + P_{21} \times \frac{32}{53}$$

$$= (P_6 + P_7 + P_8 + \cdots + P_{36}) \times \frac{32}{53}$$

$$= \frac{32}{53}$$

$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{11}$は重複組み合わせを用いて下記のように求められる。

$$P_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1}{46656},$$

$$P_2 = {}_6H_1\left(\frac{1}{6}\right)^6 = {}_6C_1\left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{6}{46656}$$

$$P_3 = {}_6H_2\left(\frac{1}{6}\right)^6 = {}_7C_2\left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{21}{46656}$$

しかし、$12 \leqq n \leqq 21$ のとき、さいころの目の最大値が 6 という制限があるため、$P_n$ を計算で求めるのは困難となる。

[ II ] 数学 II　三角関数

(1) $f(\theta) = \cos 2\theta - 2\sin\theta$

$= 1 - 2\sin^2\theta - 2\sin\theta$

$= -2t^2 - 2t + 1$

←2 倍角の公式

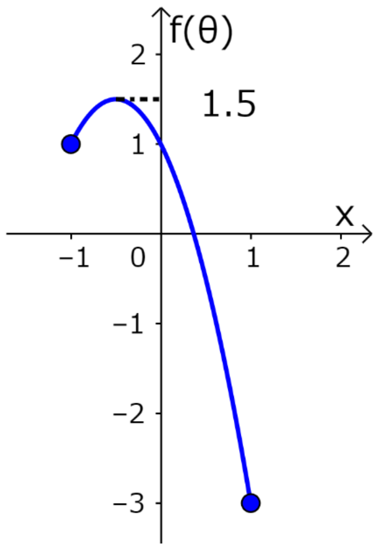
$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned}}$$

(2) $f(\theta) = -2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$

$0° \leqq \theta \leqq 360°$ より $-1 \leqq t \leqq 1$

よって、$t = -\dfrac{1}{2}$ すなわち

$\theta = 210°, 330°$ のとき、最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。




※置換したら変域を求める。

※問題文が度数法を用いているので、度数法で答える。

(3) $f(\theta) + C = 0$

$f(\theta) = -C$

$-1 < t < 1$ のとき、$t$ に対応する $\theta$ は 2 個存在し、$t = \pm 1$ のとき、$\theta$ は 1 個存在する。

よって、異なる 2 つの解を持つのは

$-C = -\dfrac{3}{2}, -3 < -C < 1$ すなわち $C = \dfrac{3}{2}, -1 < C < 3$ のときである。

したがって、$C = 0, 1, 2$ である。

$C$の値と解の個数の関係は下記のようになる。

$C < -\frac{3}{2}, 3 < C$ のとき、0 個

$C = 3$ のとき、1 個

$-1 < C < 3, C = -\frac{3}{2}$ のとき、2 個

$C = -1$ のとき、3 個

$-\frac{3}{2} < C < -1$ のとき、4 個

※C の範囲ではなく、整数 C の値を求める問題であることに注意。

[ III ] 数学B　種々の数列

(1) $S_n = (a_n + \alpha)^2$

$S_1 = (a_1 + \alpha)^2, S_1 = a_1 = \frac{1}{4}$　　← $S_1 = a_1$

$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4} + \alpha\right)^2$

$\pm\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \alpha$

$\alpha = -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

$\alpha > 0$ より $\alpha = \frac{1}{4}$

(2) $S_{n+1} = \left(a_{n+1} + \frac{1}{4}\right)^2$

$-)\quad S_n = \left(a_n + \frac{1}{4}\right)^2$

$a_{n+1} = {a_{n+1}}^2 + \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{16} - \left({a_n}^2 + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{16}\right)$　　← $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

${a_{n+1}}^2 - \frac{1}{2}a_{n+1} - {a_n}^2 - \frac{1}{2}a_n = 0$

$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) - \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) = 0$

$(a_{n+1} + a_n)\left(a_{n+1} - a_n - \frac{1}{2}\right) = 0$

$a_{n+1} = -a_n$ または $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$

※解が複数になった場合には条件を満たしているか確認する。

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ のとき、$a_n > 0$ より $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$となり、

$|a_{n+1}| < \frac{1}{2}$ に反する。

$\therefore a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ は不適。

したがって、$a_{n+1} = -a_n$

←等比数列の漸化式 $a_{n+1} = ra_n$

(3) $a_n = \frac{1}{4}(-1)^{n-1}$

$S_n = \dfrac{\frac{1}{4}\{1 - (-1)^n\}}{1 + 1} = \frac{1}{8}\{1 - (-1)^n\}$

$\therefore \begin{cases} n \text{ が奇数のとき } \frac{1}{4} \\ n \text{ が偶数のとき } 0 \end{cases}$

[ IV ] 数学 III　積分

(1) $\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t + C$ (C: 積分定数)

(2) $f(-x) = -f(x)$ より $y = f(x)$ は奇関数である。

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

(3) $t = -x$ とすると、

$g(-t) = g(x)$

$dt \to -dx$

| t | $-a$ ⋯ $a$ |
|---|---|
| $x$ | $a$ ⋯ $-a$ |

$$\int_{-a}^{a} \frac{g(t) - g(-t)}{2} dt = \int_{-a}^{a} \frac{g(t)}{2} dt + \int_{a}^{-a} \frac{g(x)}{2} dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{g(t)}{2} dt - \int_{-a}^{a} \frac{g(t)}{2} dt$$

$$= 0$$

(4) (3)より、$\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{g(t) - g(-t)}{2} dt = 0$

$$\int_{-a}^{a} \frac{g(t)}{2} dt = \int_{-a}^{a} \frac{g(-t)}{2} dt$$

$g(t) = \dfrac{t\sin t}{1 + \pi^{\sin^3 t}}$ とすると、

$$g(-t) = \frac{-t\sin(-t)}{1 + \pi^{\sin^3(-t)}} = \frac{t\sin t}{1 + \pi^{-\sin^3 t}} = \frac{t\sin t \cdot \pi^{\sin^3 t}}{1 + \pi^{\sin^3 t}}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \{g(t) + g(-t)\}dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left\{\frac{t\sin t}{1 + \pi^{\sin^3 t}} + \frac{t\sin t \cdot \pi^{\sin^3 t}}{1 + \pi^{\sin^3 t}}\right\} dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{t\sin t\left(1 + \pi^{\sin^3 t}\right)}{1 + \pi^{\sin^3 t}} dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} t\sin t\,dt$$

$$= [-t\cos t + \sin t]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{t\sin t}{1 + \pi^{\sin^3 t}} dt = \frac{I}{2} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

←部分積分

$$\int f(x)g(x)'dx = f(x)g(x)$$

$$+ \int f(x)'g(x)dx$$